Workshop zur quasigeostrophischen Dynamik

Ziel dieses Workshops ist es, die Vertikalbewegung in der Erdatmsphäre etwas besser zu verstehen. Wir beginnen mit elementaren Gedanken zu Vertikalbewegungen und diskutieren dann, dass auch die grossräumige (synoptische) Strömung ein Anheben und Absinken von Luftmassen verursachen kann. Der Endpunkt wird die sogenannte Omega-Gleichung sein, welche den Zusammenhang zwischen grossräumiger (horizontaler) Strömung und Vertikalbewegung herstellt. Wir beschränken uns auf eine qualitative Herleitung dieser Gleichung.

Die Themen und Fragen des Workshops sollen in Zweier- oder Dreiergruppen diskutiert und beantwortet werden.

3.1 Vertikalbewegungen in der Atmosphäre

Aufgabe. Vertikalwinde spielen in der Erdatmosphäre eine entscheidende Rolle, insbesondere in der wetteraktiven Troposphäre. Überlege Dir, worin diese grosse Bedeutung begründet ist?

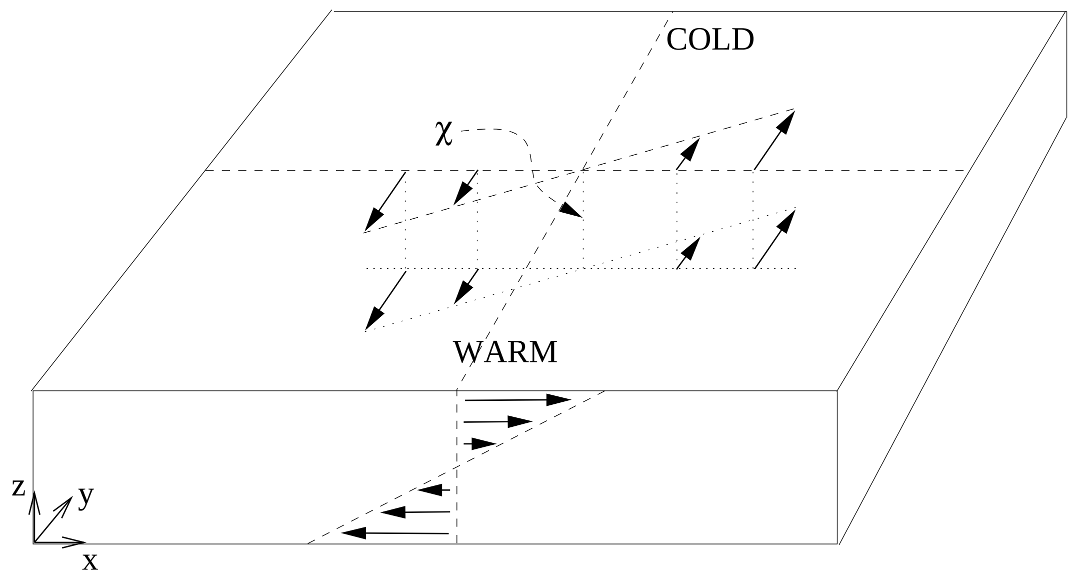
Aufgabe: Es stellt sich nun die Frage, wie es in der Atmospäre zu Vertikalbewegungen kommen kann. Finde möglichst viele Prozesse, die lokal oder auch grossräumig zu einem Anheben von Luftmassen führen können.

3.2 Erhaltung des thermischen Windgleichgewichts

In den vorherigen Vorlesungen wurde das geostrophische und thermische Windgleichgewicht diskutiert. Beide Bedingungen sind in der freien Atmosphäre (oberhalb der planetaren Grenzschicht) in guter Näherung erfüllt. In diesem Abschnitt soll eine Strömungssituation im Detail analysiert werden, wobei stets gefordert ist, dass die beiden genannten Gleichgewichte erfüllt sind. Es wird sich zeigen, dass die geostrophische Strömung das thermische Windgleichgewicht "zerstören" kann und dass sich hieraus die Notwendigkeit einer Vertikalbewegung ergibt.

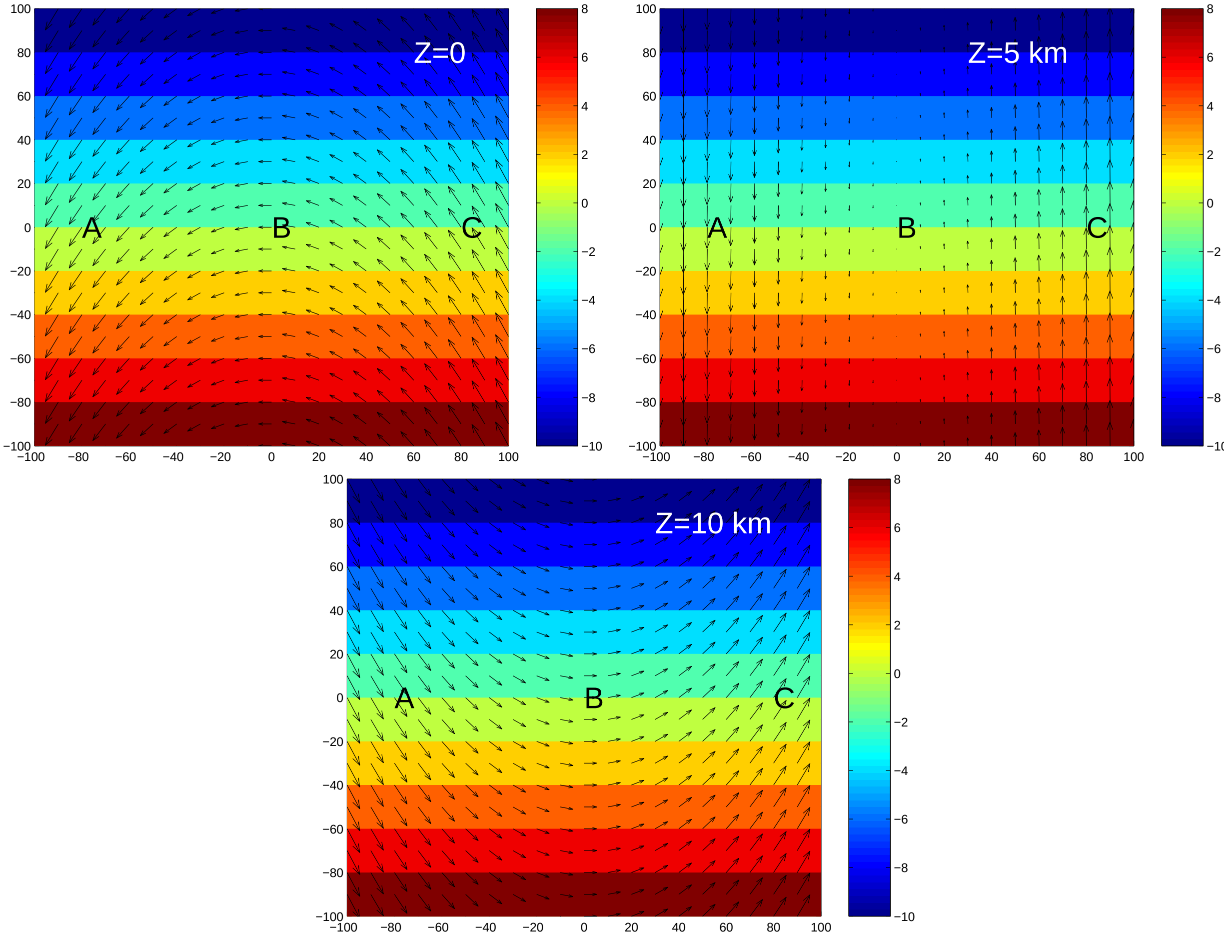
Aufgabe: Schreibe in wenigen Worten auf, was man unter dem thermischen Windgleichgewicht versteht.

Im Süden sei die Temperatur hoch. Gegen Norden hin nehme sie kontinuierlich ab. Im folgenden nehmen wir an, dass in Bodennähe ein Ostwind vorherrsche (z=0 km), in der mittleren Troposphäre Windstille besteht (z=5 km) und in der oberen Troposphäre (z=10 km) ein Westwind besteht. Die Änderung des Windes mit der Höhe zeigt also von West nach Ost. Die Situation ist im folgenden Diagramm dargestellt:



Aufgabe: Zeige, dass dieses Windfeld im Einklang mit dem thermischen Windgleichgewicht ist. Beschreibe dies mit wenigen Worten.

Die folgenden drei Abbildungen zeigen das Wind- und das Temperaturfeld am Boden, auf mittlerer Höhe und am Deckel (Tropopausenhöhe).



Aufgabe: Überlege, wie das Druckfeld für diese Situation aussehen muss, damit alle Winde im geostrophischen Gleichgewicht sind. Zeichne am besten ein paar Isobaren auf den z-Flächen z=0,5,10 km ein.

Wir wollen uns im folgenden überlegen, wie sich die Situation im Punkt B ändert. Dazu nehmen wir an, dass alle Winde im geostrophischen Windgleichgewicht sind und dass das thermische Windgleichgewicht gilt. Die Bewegungsgleichungen für den Wind lassen sich unmittelbar hinschreiben (vergleiche mit der Vorlesung Fluiddynamik):

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - f \cdot u &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f \cdot v &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}\end{aligned}$$

In diesen beiden Gleichungen für den Wind u in West/Ost- (entlang der x-Achse) und den Wind v in Süd/Nord-Richtung (entlang der y-Achse) treten neben den Trägheitstermen (die ersten drei Terme) je ein Term für die Corioliskraft (der vierte Term) und je ein Term für die Druckgradientenkraft (rechts vom Gleichheitszeichen) auf. In der vorherrschenden Strömungsituation können einige Terme vernachlässigt werden, wenn wir die Situation am Punkt B betrachten: v hängt nur von x ab und somit ist $\partial v/\partial y = 0$. Ebenso hängt u nur von z ab und es ist somit $\partial u/\partial x = 0$ und $\partial u/\partial y = 0$. Wenn wir geostrophisches Windgleichgewicht voraussetzen, so kompensieren sich ferner der Coriolisterm und der Druckgradiententerm. Damit reduzieren sich unter diesen Vorausetzungen also die obigen zwei Gleichungen auf:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

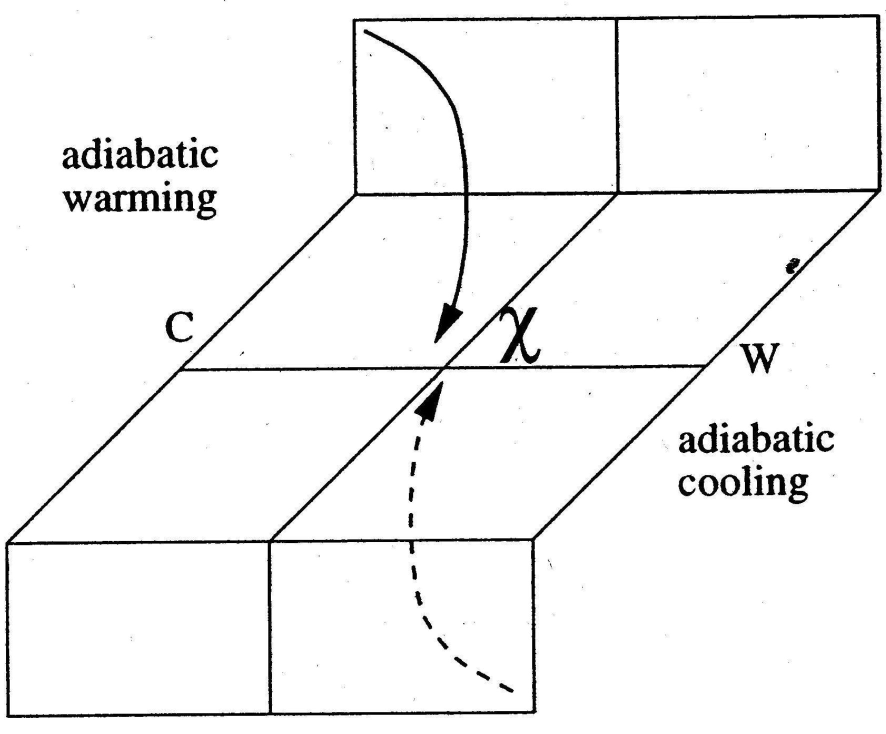
Wir überlegen uns nun, wie sich der Wind an der Position B innerhalb eines kleinen Zeitintervalls Δt ändert. In erster Ordnung wird sich gemäss der obigen Ausdrücke der Wind u in x-Richtung nicht ändern. Für den Wind v in y-Richtung finden wir am Deckel eine Abnahme mit der Zeit ($u > 0, \partial v/\partial x > 0$: Tendenz $\partial v/\partial t < 0$ für einen Nordwind), am Boden hingegen eine Zunahme mit der Zeit ($u < 0, \partial v/\partial x > 0$: Tendenz $\partial v/\partial t > 0$ für einen Südwind). Anschaulich sieht es also so aus, als ob der Wind in y-Richtung durch den Wind in x-Richtung mitgetragen ist - ganz analog zur Temperatur- oder Vorticityadvektion.

Aufgabe: Mache Dir zunächst anschaulich die Änderung des Windes anhand der vorherigen Abbildungen klar. Zeichne in die vorherige Abbildung explizit den Vektor der Windänderung $\vec{v}_{z=10km} - \vec{v}_{z=0km}$ ein. Er wird parallel zur y-Achse liegen. Überlege Dir anschliessend, wie sich die Temperatur als Folge der Temperaturadvektion an den Punkten A,B und C ändert innerhalb des kurzen Zeitintervalls Δt. Am besten markierst Du Regionen, die eine Temperaturzunahme erfahren, mit einem Symbol $+$. Gebiete mit einer Temperaturabnahme markierst Du mit einem Symbol $-$, solche mit gleichbleibender Temperatur mit einem Symbol 0.

Fassen wir das bisherige zusammen: Unter der Annahme des geostrophischen Windgleichgewichts produzieren wir am Boden einen Südwind, am Deckel hingegen einen Nordwind. Das bedeutet, dass man eine negative vertikale Windscherung $\partial v/\partial z < 0$ produziert. Nun wissen wir, dass eine solche vertikale Windscherung über das thermische Windgleichgewicht mit einem horizontalen Temperaturgradienten $\partial T/\partial x$ zusammenfallen muss. Konkret verlangt die negative Windscherung warme Luft links (in Region A) und kalte Luft rechts (in Punkt C).

Aufgabe: Betrachte die Tendenzen für die vertikale Windscherung $\partial v/\partial z$ und für den horizontalen Temperaturgradienten $\partial T/\partial x$ im Punkt B und auf 5 km Höhe. Zeige, dass diese Änderungen *nicht* im Einklang mit dem thermischen Windgleichgewicht sind.

Schlussfolgernd können wir sagen, dass die dargestellte Strömungssituation eine Tendenz aufweist, das thermische Windgleichgewicht zu zerstören. Dieses stellt jedoch in den Aussertropen eine derart starke Bedingung an die Strömung, dass es nicht verletzt werden darf und dass demzufolge die Atmosphäre auf jede Tendenz zur Zerstörung des thermischen Windgleichgewichts reagieren muss. In der folgenden Abbildung ist gezeigt, wie die Atmosphäre reagiert. Es bilden sich vertikale Winde aus: Links im Gebiet A kommt es zu einem Absinken, rechts im Gebiet C zu einem Aufsteigen der Luft.

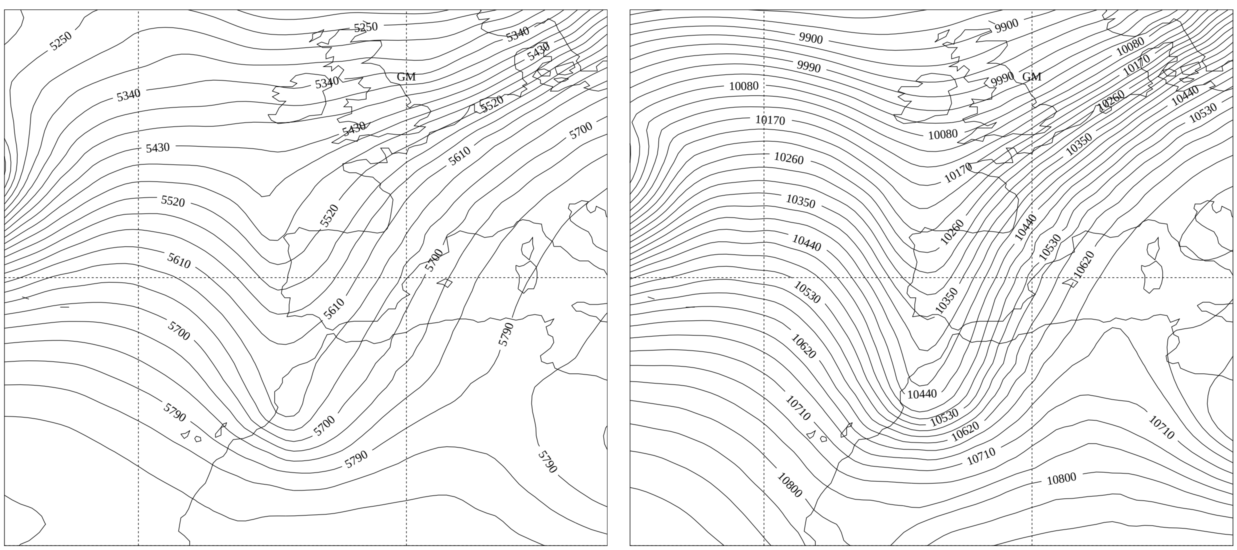


Aufgabe: Mache Dir klar, weshalb die eingezeichneten Vertikalwinde das Problem lösen! Was bedeutet insbesondere '"adiabatic cooling" und "adiabatic warming"? Der Punkt χ in der Abbildung entspricht dem Punkt B auf 5 km Höhe in der vorherigen Abbildung.

Zusammfassend können wir nun folgendes sagen: Der (grossräumige) geostrophische Wind kann das thermische Windgleichgewicht zerstören. Dieses stellt jedoch eine derart starke Bedingung an die aussertropische Atmosphäre, dass diese auf die zerstörende Tendenz reagieren muss. Sie tut dies, indem Vertikalwinde auftreten, die das thermische Windgleichgewicht wieder herstellen. Als wichtige Schlussfolgerung bleibt: Die synoptisch-skalige Strömung kann ein grossräumiges Anheben oder Absinken von Luftmassen verursachen.

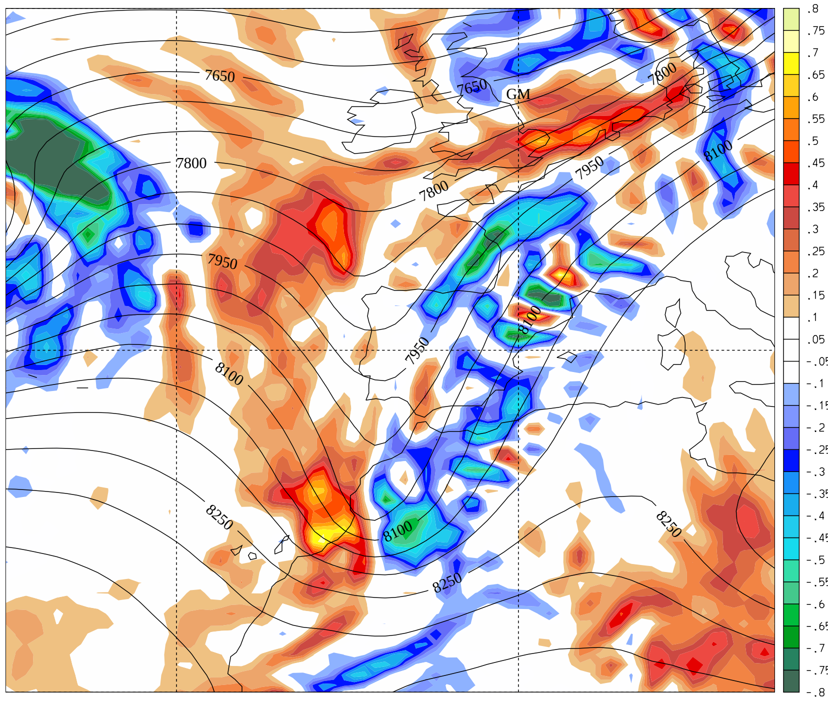
3.3 Anwendungsbeispiel für einen Tiefdrucktrog

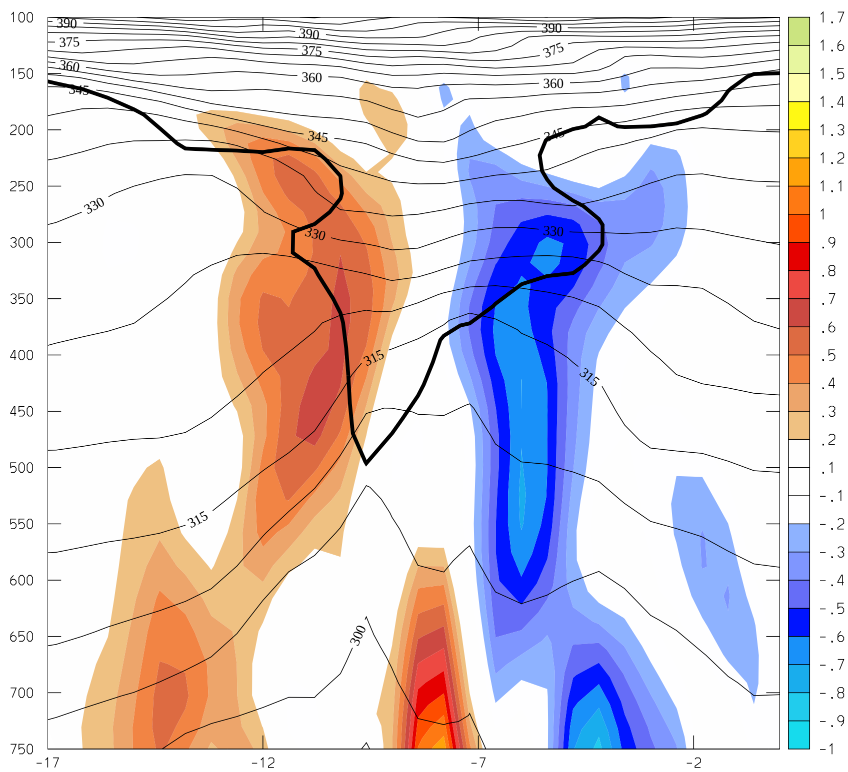
In der folgenden Abbildung ist eine konkrete Anwendung des obigen Falles gezeigt. Ein Tiefdrucktrog befindet sich über Westeuropa. Der Wind dreht von Nord auf der Rückseite des Trogs zu Süd auf dessen Vorderseite. Ausserdem hat man eine Zunahme der Westwindkomponente mit der Höhe. Dies entspricht also genau der Situation in der vorherigen idealisierten Situation. Gezeigt ist das Geopotential auf 500 hPa (links) und 250 hPa (rechts) am 26 November 2006, 00 UTC.



Aufgabe: Überlege Dir anhand der entwickelten Theorie, auf welcher Seite des Troges man Aufsteigen und auf welcher man Absinken findet.

In den folgenden zwei Abbildungen ist der Vertikalwind eingezeichnet. Es handelt sich um den Vertikalwind (in Pa/s) auf 375 hPa (oben) und in einem vertikalen Querschnitt entlang dem 30 N Breitenkreis (unten) am 26 November 2006, 00 UTC. Unten ist zusätzlich die potentielle Temperatur (dünne Linien) und die dynamische Tropopause (dicke Linie) eingezeichnet.

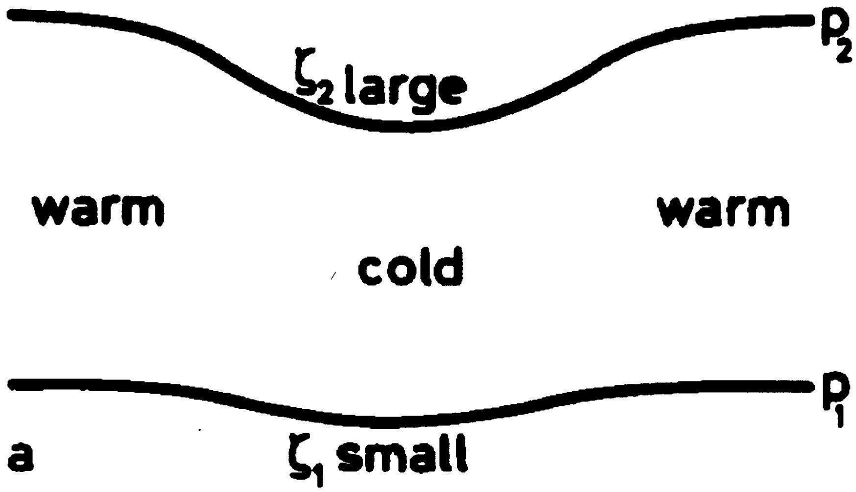




Aufgabe: Diskutiere die Bedeutung der Vertikalwinde auf der Vorder- und Rückseite des Troges für das Wetter in diesen Regionen. Die Vertikalwinde sind in Pa/s angegeben. Überlege Dir, die entsprechende Grössenordnung in m/s.

3.4 Eine Verallgemeinerung

In diesem Abschnitt wollen wir die bisherigen Gedanken etwas weiter führen. Dazu müssen wir einige Vorbereitungen treffen. Wir starten damit, dass wir wiederum eine idealisierte Situation betrachten. Diese ist in der folgenden Abbildung gezeigt:



Wir betrachten eine rotationssymmetrische Situation. Gezeigt sind die Höhen von zwei Druckflächen p_1 und p_2. Insbesondere die obere Druckfläche zeigt im Zentrum eine markante Absenkung, dh. dort weist das Geopotential z_2 ein lokales Minimum auf. Auch die untere Druckfläche ist leicht abgesenkt, jedoch weniger stark als die obere Fläche.

Aufgabe: Zeichne die geopotentiellen Höhen z_2 und z_1 für die beiden Druckflächen in einem horizontalen Querschnitt ein. Füge in diese Querschnitt ebenfalls den geostrophischen Wind ein. Es sollte sich in beiden Fällen ein zyklonales Windfeld ergeben.

Der geostrophische Wind ist gegeben durch die folgende einfache Formel, wobei f der Coriolisparameter, g die Erdbeschleunigung und ϕ die geopotentielle Höhe ist:

$$\vec{v} = \frac{g}{f} \cdot \vec{k} \times \vec{\nabla}\phi$$

Damit lässt sich auch sehr einfach die (geostrophische) Vortizität $\xi = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ durch die geopotentielle Höhe darstellen. Man erhält nach kurzer Rechnung (diese wird besonders einfach, wenn man die Rotationssymmetrie der gezeigten Situation berücksichtigt):

$$\xi = \frac{g}{f} \cdot \nabla^2\phi$$

Die Vortizität ergibt sich also unmittelbar aus dem Laplace der geopotentiellen Höhe. Jetzt betrachten wir die Differenz der Vortizitäten auf der oberen und unteren Schicht. Es ergibt sich sofort die folgende Bedingung:

$$f \cdot (\xi_2 - \xi_1) = g \cdot \boldsymbol{\nabla}^2 (\phi_2 - \phi_1)$$

Im folgenden nehmen wir diese Gleichung als Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen. In Worten gefasst besagt sie, dass ein Gleichgewicht besteht zwischen der Änderung der Vortizität mit der Höhe $(\xi_2 - \xi_1)$ und dem Laplace der relativen Topographie $(z_2 - z_1)$.

Aufgabe: Mache Dir in der vorherigen Abbildung klar, was die relative Topographie $\phi_2 - \phi_1$ bedeutet. Wo ist diese gross und wo ist sie klein?

Es ist klar, dass die Vortizitätsänderung etwas mit dem Windfeld zu tun hat, denn so ist die Vortizität ja definiert. Jetzt betrachten wir die relative Topographie.

Aufgabe: Überlege Dir (oder schlage in den bisherigen Vorlesungen nach), wovon die relative Topographie abhängt. Am besten leitest Du Dir diesen Zusammenhang direkt mit Hilfe der hydrostatischen Gleichung und der idealen Gasgleichung her. Diese beiden Gleichungen lauten:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \text{and} \quad p = \rho R T$$

Dabei ist p der Druck, ρ die Dichte der Luft, g die Erdbeschleunigung und R die Gaskonstante.

Zusammenfassend haben wir bisher folgendes erreicht: Es gibt eine Gleichgewichtsbedingung zwischen der Änderung der Vortizität mit der Höhe und dem Temperaturfeld in einer Zwischenschicht. Bei der Herleitung dieses Zusammenhangs wurde das geostrophische Windgleichgewicht und die hydrostatische Näherung verwendet. Diese beiden "Zutaten" wurden ebenfalls bei der Herleitung des thermischen Windgleichgewichts verwendet, dh. die obige Gleichgewichtsbedingung ist im wesentlichen eine andere Formulierung des thermischen Windgleichgewichts.

Aufgabe: Überlege Dir, dass die vertikalen Windscherungen und horizontalen Temperaturgradienten im Einklang mit dem thermischen Windgleichgewicht sind.

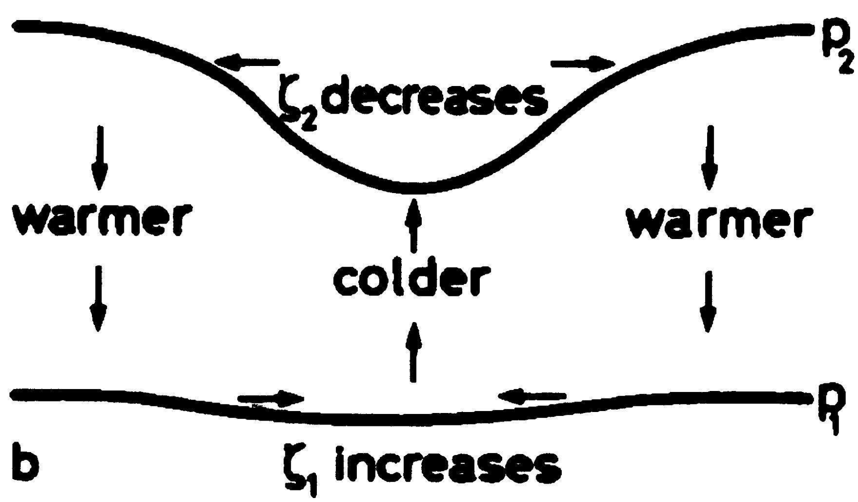
Es können nun Prozesse in der Atmosphäre auftreten, welche dieses Gleichgewicht stören. Es kann sich dabei um einen Störung auf der linken Seite der Gleichung handeln, dh. die Änderung der Vortizität mit der Höhe wird gestört. Ebenso ist eine Störung auf der rechten Seite der Gleichung denkbar, dh. der Laplace der Temperatur in einer Zwischenschicht wird gestört. Im allgemeinen Fall treten natürlich beide Störungen auf. Wir diskutieren im folgenden nicht, woher die Störungen stammen, sondern gehen davon aus, dass irgendein Prozess das folgende Ungleichgewicht bewirkt hat:

$$f \cdot (\xi_2 - \xi_1) > g \cdot \boldsymbol{\nabla}^2(\phi_2 - \phi_1)$$

Die Atmosphäre wird das Gleichgewicht wieder herstellen "wollen". Betrachte dazu den folgenden Text aus dem Fachartikel "Geostrophy" von Arnt Eliassen (erschienen im Januar 1984 im Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, Vol. 110, No. 463). Angefügt ist zudem die dazugehörige Abbildung:

Suppose that Fig. 3(b) represents a case where the equilibrium is disturbed, such that $f(\zeta_2 - \zeta_1) > g\nabla^2(z_2 - z_1)$. The equilibrium may be restored by displacing the air particles as indicated by arrows. The vertical displacements will in a statically stable atmosphere lead to a reduction of the thickness in the middle and an increase in the environment, and hence to an increase of $\nabla^2(z_2 - z_1)$. Mass continuity requires that these vertical displacements are combined with horizontal divergent displacements at the upper level (z_2) and convergent displacements at the lower level (z_1). As a result, the vorticity difference ($\zeta_2 - \zeta_1$) is reduced, and with suitable displacement lengths, the balance is restored.

In the atmosphere, the thermal wind balance



Aufgabe: Diskutiere die Effekte, die in Eliassens Text beschrieben sind. Überlege Dir insbesondere, wie die Vertikalwinde die relative Topographie und das Temperaturfeld beeinflussen und wie die dazugehörigen horizontalen ageostrophischen Winde die Vortizitäten beeinflussen. Als wichtige Erkenntnis sollte herauskommen, dass das Gleichgewicht wieder hergstellt wird, indem auf beiden Seiten der Gleichung eine "Korrektur" stattfindet.

Zusammenfassend lässt sich dieser Abschnitt wie folgt: Sowohl eine Störung des Temperaturfeldes (genauer, des Laplace des Temperaturfeldes) als auch eine Störung der Änderung der Vortizität mit der Höhe führt zu einem ageostrophischen Windfeld. Dieses ageostrophische Windfeld ist nicht divergenzfrei und muss daher auch mit einer Vertikalbewegung einhergehen. Damit haben wir wiederum gezeigt, dass die grossräumige Strömung ein Anheben oder Absinken bewirken kann, indem sie zu Störungen in den beiden Termen der obigen Gleichung beiträgt. Tatsächlich finden in der realen Atmosphäre dauernd Prozesse statt, die solche Störungen bewirken und damit zu Vertikalbewegungen führen.

3.5 Die Omega-Gleichung

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, wie aus einem Ungleichgewicht eine ageostrophische Zirkulation mit Vertikalwinden resultiert. Die wesentliche Quellterme waren hierbei:

$$f \cdot (\xi_2 - \xi_1) \quad \text{und} \quad g \cdot \boldsymbol{\nabla}^2 (\phi_2 - \phi_1)$$

Im Gleichgewicht sind diese beiden Quellterme gleich gross. Es stellt sich nun die Frage, wie es zu einem Ungleichgewicht kommen kann. Wir betrachten hier den Einfluss der Advektion, zunächst für den ersten Term (Änderung der Vortizität mit der Höhe), anschliessend für den zweiten Term (Laplace der relativen Topographie = Laplace der Temperatur der Zwischenschicht).

Betrachten wir zunächst nur den ersten Quellterm, $f \cdot (\xi_2 - \xi_1)$. Es zum Beispiel möglich, dass man am oberen Rand eine andere Vortizitätsadvektion vorfindet als am unteren Rand, dh. es sind die folgenden beide Terme verschieden:

$$\vec{v_2} \cdot \boldsymbol{\nabla}\, \xi_2 \quad \text{und} \quad \vec{v_1} \cdot \boldsymbol{\nabla}\, \xi_1$$

In dieser Formel können wir die Vortizität ξ durch $\xi = g/f \cdot \boldsymbol{\nabla}^2 \phi$ ersetzen. Wenn wir zudem der Einfachheit halber annehmen, dass der Coriolisparameter f konstant ist, so lassen sich die beidem Terme wie folgt schreiben:

$$g \cdot (\vec{v_2} \cdot \boldsymbol{\nabla}\,)(\boldsymbol{\nabla}^2 \phi_2) \quad \text{und} \quad g \cdot (\vec{v_1} \cdot \boldsymbol{\nabla}\,)(\boldsymbol{\nabla}^2 \phi_1)$$

Betrachten wir nur die Advektion durch den geostrophischen Wind $\vec{v}_G$ und schauen wir anstelle der Änderung (Differenz) zwischen zwei Schichten 2 und 1 die vertikale Ableitung $\partial/\partial z$ an, so erhalten wir den folgenden Quellterm:

$$g \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[(\vec{v}_G \cdot \boldsymbol{\nabla}\,)(\boldsymbol{\nabla}^2 \phi) \right]$$

Dieser Quellterm beschreibt die Änderung der Vortizitätsadvektion mit der Höhe. Nimmt diese Vortizitätsadvektion mit der Höhe zu, so spricht man von PVA ("positive vorticity advection"). Nimmt sie hingegen mit der Höhe ab, so verwendet man die Abkürzung NVA ("negatiev vorticity advection"). PVA ist mit einem aufsteigenden Vertikalwind verbunden, NVA mit einem absinkenden Vertikalwind.

Ganz analog kann man den zweiten Quellterm $g \cdot \boldsymbol{\nabla}^2(\phi_2 - \phi_1)$ behandeln. Auch hier soll die vertikale Ableitung anstelle der Änderung zwischen zwei Schichten betrachtet werden. Dann ist die relative Topographie $\phi_2 - \phi_1$ zu ersetzen durch $\partial\phi/\partial z$. Wenn man wiederum nur die Advektion durch den geostrophischen Wind zulässt, so ergibt sich der zweite Quellterm als:

$$\frac{g}{f} \cdot \boldsymbol{\nabla}^2 \left[(\vec{v}_G \cdot \boldsymbol{\nabla}) \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]$$

In Worten gefasst beschreibt dieser zweite Term den Einfluss der horizontalen Temperaturadvektion, oder genauer: des Laplace der horizontalen Temperaturadvektion. Ist dieser Term positiv, so hat man ein Anheben der Luftmassen, während bei einem negativen Term ein Absinken resultiert.

Damit haben wir den folgenden (totalen) Quellterm für Vertikalbewegungen motiviert. Hierbei bedeutet $F > 0$ aufsteigende Bewegung und $F < 0$ absinkende Bewegung:

$$F = f \cdot g \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[(\vec{v}_G \cdot \boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\nabla}^2 \phi) \right] - g \cdot \boldsymbol{\nabla}^2 \left[(\vec{v}_G \cdot \boldsymbol{\nabla}) \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]$$

In der Master-Vorlesung "Large-scale Dynamics" wird dieser Quellterm exakt aus den Grundgleichungen hergeleitet. Insbesondere wird dort auch der exakte Zusammenhang mit der Vertikalgeschwindigkeit w hergeleitet. Denn bisher wissen wir zwar, dass je nach dem Vorzeichen von F ein Aufsteigen oder Absinken resultiert, es ist aber nicht klar, wie die Stärke der Vertikalbewegungen mit F zusammenhängen. Wir verzichten an dieser Stelle auf eine detailierte Herleitung und geben das Endergebnis, die sogenannte quasigeostrophische Omega-Gleichung, ohne Beweis an:

$$N^2 \cdot (\boldsymbol{\nabla}^2 w) + f^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = F$$

Es lässt sich ferner zeigen, dass oft der linke Term proportional zu $-w$ ist. So bleibt schlussendlich die folgende Omega-Gleichung:

$$w \approx -f \cdot g \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[(\vec{v}_G \cdot \boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\nabla}^2 \phi) \right] + g \cdot \boldsymbol{\nabla}^2 \left[(\vec{v}_G \cdot \boldsymbol{\nabla}) \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]$$

In dieser Form wird die Omega-Gleichung in der Master-Vorlesung "Large-scale Dynamics" hergeleitet. Links steht das "Zielfeld", nämlich die grossräumige Vertikalbewegung. Rechts befinden sich die beiden Quellterme, die eine solche Vertikalbewegung verursachen können, nämlich die Änderung der Vortizitätsadvektion mit der Höhe (1.Term) und der Laplace der Temperaturadvektion (2.Term).

Zusammenfassend können wir nun folgendes sagen: Wir haben eine Gleichung, die sogenannte Omega-Gleichung, "hergeleitet", die einen Zusammenhang herstellt zwischen der grossräumigen horizontalen Strömung und den ageostrophischen Vertikalbewegungen. Die Quellterme für den Vertikalwind hängen also nur von der geopotentiellen Höhe ab: Kennt man die geopotentielle Höhe (und mit dem geostrophischen Windgleichgewicht die horizontalen Winde) zu einem Zeitpunkt, so lassen sich hieraus mit der Omega-Gleichung die grossräumigen Vertikalbewegungen ableiten. Es gibt zwei Quellterme: die Zunahme der Vortizitätsadvektion mit der Höhe und (der Laplace) der Temperaturadvektion. Nimmt die Vortizitätsadvektion mit der Höhe zu (PVA), so erwartet man grossräumig eine aufsteigende Luftbewegung. Nimmt die Vortizitätsadvektion mit der Höhe hingegen ab, so erwartet man ein grossräumiges Absinken. Analog führt ein positiver Laplace der Temperaturadvektion zu Aufsteigen und ein negativer Laplace zu einem Absinken.

3.6 Anwendungsbeispiel

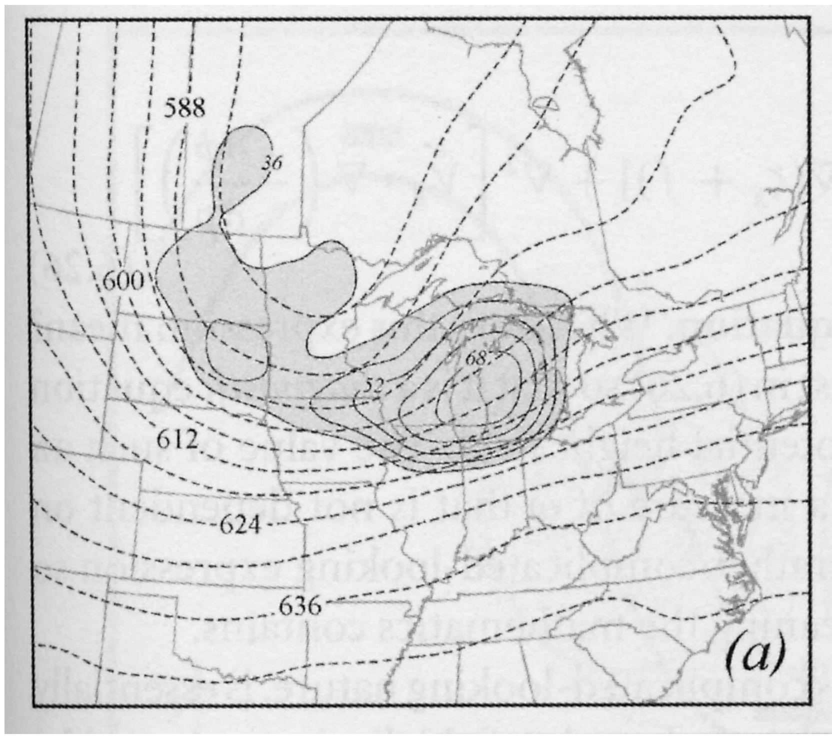
In diesem Abschnitt wollen wir die Omega-Gliechung für einen realen Fall anwenden. Es zeigt sich, dass die obige Form der Omega-Gleichung noch nicht optimal ist. Tatsächlich kommt es häufig vor, dass die beiden Quellterme verschiedenes Vorzeichen haben und dass somit der Vertikalwind aus der Differenz zweier "grosser" Terme berechnet werden muss. Dies kann zu beträchtlichen numerischen Unsicherheiten führen. Vermutlich die schönste und praktischste "Umformulierung" der Omega-Gleichung basiert auf den sogenannten Q-Vektoren. Diese werden in der Master-Vorlesung "Large-scale Dynamics" hergeleitet. Hier wollen wir eine Formulierung verwenden die auf folgenden Artikel zurückgeht: "On the Interpretation of the Diagnostic Quasi-Geostrophic Omega Equation" by Kevin E. Trenberth, Monthly Weather Review, Volume 106, Issue 1, January 1978. In seinen Schlussfolgerungen schreibt Trenberth:

> The more traditional approach of separating the RHS of the quasi-geostrophic omega equation into the two parts—1) the vertical derivative of vorticity advection, and 2) the Laplacian of the thermal advection—can be misleading because they are not independent. In many cases both terms contribute roughly equal amounts to vertical motions in the middle troposphere and part of each term cancels. An alternative but complementary approach has been proposed which removes the ambiguity of this interpretation.
>
> The quasi-geostrophic omega equation has been reanalyzed into a form which readily allows vertical motions to be qualitatively assessed directly from a chart that features geopotential height and thickness contours. Alternatively, the analyses should be constructed so that areas of upward motion, as determined from satellite pictures, are consistent with the rule that upward motion is present where there is cyclonic vorticity advection by the thermal wind. This rule is reasonably valid in the middle troposphere (from about 700 to 350 mb) and also explains several other empirical-dynamical rules of synoptic meteorology. It provides some justification for the concept of steering by the thermal field and helps explain the changing relationship between the main area of upward motion and the center of the depression at the various stages of a cyclone's development.

Aufsteigende Luftbewegungen findet man also in den Regionen mit zyklonaler Vortizitätsadvektion durch den thermischen Wind. Entsprechend findet man absinkende Luftbewegungen bei antizyklonaler Vortizitätsadvektion durch den thermischen Wind. Formal ausgedrückt lautet dies:

$$w \approx -\frac{\partial v}{\partial z} \cdot \boldsymbol{\nabla}\, \xi$$

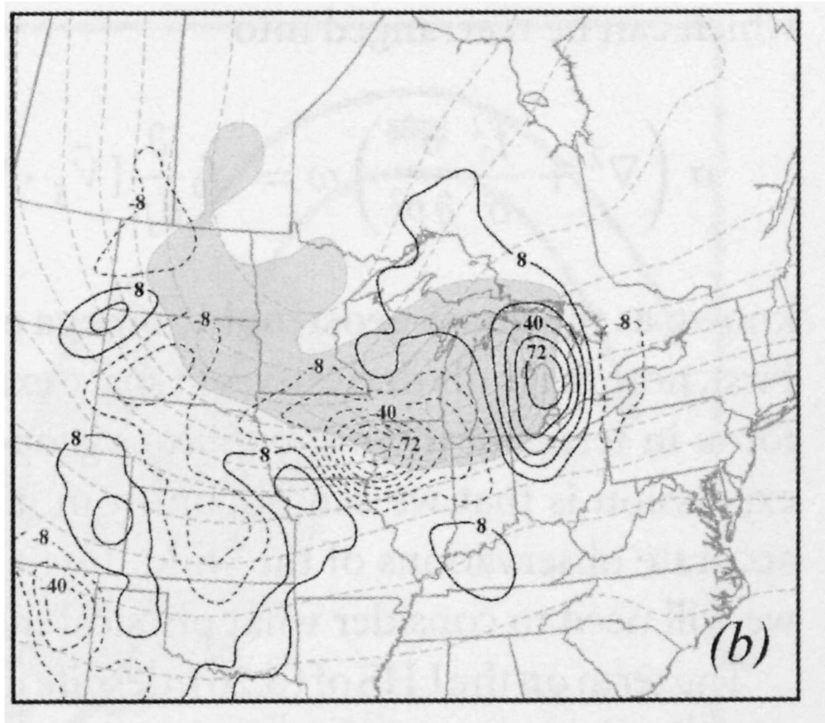
Wir verzichten hier auf eine Herleitung der Näherung aus der obigen Form der Omega-Gleichung. Die Details können im Artikel von Trenberth nachgelesen werden. Im folgenden soll die Anwendung dieser Formel an einem Beispiel diskutiert werden. Die folgenden Abbildungen stammen aus dem Buch "Midlatitude Atmospheric Dynamics" von Jonathan E. Martin, in welchem die Omega-Gleichung sehr schön diskutiert wird.



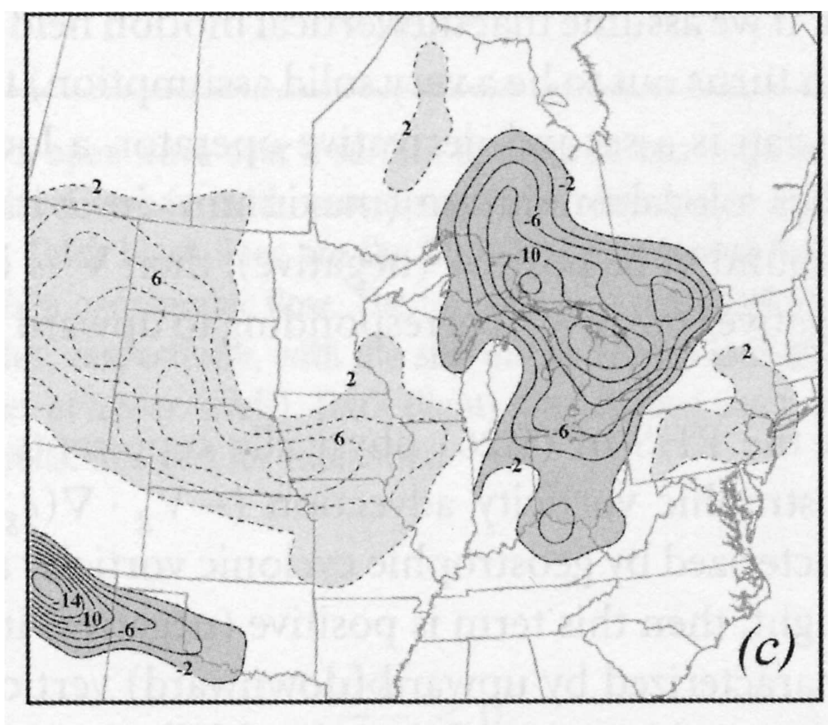
Gezeigt sind die Isolinien der 300-700 hPa relativen Topographie (strichliert, in dam) und die Summe $\xi_{300hPa} + \xi_{700hPa} + f$ der relativen Vortizitäten auf 300 und 700 hPa und der planetaren Vortizität f (schattiert, in $10^{-5}s^{-1}$). Es handelt sich um den 13. November 2003, 00 UTC.

Aufgabe: Diskutiere den Zusammenhang dieser Abbildung mit der obigen Trenberth-Näherung der Omega-Gleichung. Finde dann mit dieser Näherung Gebiete, in denen man grossräumiges Anheben der Luftmassen erwartet, und analog Regionen, wo man vor allem grossräumiges Absinken erwartet.

Vergleiche Deine diagnostizierten Vertikalwinde mit der berechneten Vortizitätsadvektion durch den thermischen Wind. Diese ist in der folgenden Abbildung dargestellt (in $10^{-9}mkg^{-1}$).



Vergleiche den diagnostizierten Vertikalwind mit dem tatsächlichen Vertikalwind auf 500 hPa. Diesr ist in der folgenden Abbildung gezeigt (in 0.1 hPa/s). Dunkel schattierte Bereiche entsprechen Aufstiegen, hell schattierte Bereiche Absinken.



Aufgabe: Diskutiere, wieso es zu Abweichungen zwischen dem diagnostizierten und dem tatsächlichen Wind kommt. Welche Prozesse können hierfür verantwortlich sein?